Grupa A

1	2	3	4	$\sum$

BROJ INDEKSA

SMJER STUDIJA

IME I PREZIME

Prilikom pisanja rješenja zadataka obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

Matematika II, pismeni ispit, 01.09.2014.

1. Izračunati površinu koju gradi kriva $y = x^2 + x - 6$ zajedno sa svojim tangentama povučenim na tu krivu u nula-tačkama krive. (Zadatak uraditi isključivo primjenom određenog integrala.)

2. Izračunati dvostruki integral $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ ako je D oblast ograničena pravama $y = x$, $y = 0$ i $x = 1$.

3. Isključivo primjenom krivolinijskog integrala prve vrste izračunati površinu datog cilindričnog omotača, koji leži između ravni $x0y$ i navedene površine. Figure su $x^2 + y^2 = R^2$, $2Rz = xy$.

4. Metodom diferenciranja po parametru izračunati integral $F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $|\alpha| < 1$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

Grupa B

1	2	3	4	$\sum$

BROJ INDEKSA

SMJER STUDIJA

IME I PREZIME

Prilikom pisanja rješenja zadataka obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

Matematika II, pismeni ispit, 01.09.2014.

1. Na parabolu $y = 1 - x^2$ povučena je normala u tački presjeka parabole i pozitivnog dijela x-ose. Odrediti površinu figure za koju vrijedi da je $x \geq 0$ i koju čine data parabola, povučena normala i y-osa. (Zadatak uraditi isključivo primjenom određenog integrala.)

2. Izračunati dvostruki integral $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ ako je D oblast ograničena pravama $y = x$, $x = 0$ i $y = 1$.

3. Isključivo primjenom krivolinijskog integrala prve vrste izračunati površinu datog cilindričnog omotača, koji leži između ravni $x0y$ i navedene površine. Figure su $x^2 + y^2 = R^2$, $z = R + \frac{x^2}{R}$.

4. Metodom diferenciranja po parametru izračunati integral $F(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$.

Poslije toga, uz pomoć funkcije dobijene nakon k uzastopnih izvoda $F^{(k)}(\alpha)$ izračunati $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Izračunati površinu koju gradi kriva $Y=x^2+x-6$ zajedno sa svojim tangentama povučenim na tu krivu u nultačkama krive.

$k_j: Y = x^2+x-6$

$D = 1+24 = 25$

$Y=(x-2)(x+3)$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$

$(2,0)$ i $(-3,0)$ su nule f-je

$f(0) = -6$

$(0,-6)$ je tačka presjeka f-je sa y-osom

$Y' = 2x+1$

$(-3,0)$, $Y'(-3) = -5$

$Y - 0 = -5(x+3)$

$Y = -5x-15$ jednačina tangente na krivu Y u tački $(-3,0)$

$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ je tjeme f-je

$a>0$

f-ja je $\cup$ oblika

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $\quad -\frac{D}{4a} = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}$

$T\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$

$Y - Y_1 = k(x-x_1)$ jednačina prave kroz tačku (x_1, Y_1) i koeficijentom k

u slučaju tangente $k = Y'(x_1)$

$(2,0)$, $Y'(2) = 5$

$Y - 0 = 5(x-2)$

$Y = 5x-10$ jednačina tangente na krivu Y u tački $(2,0)$

presjek pravih:

$$Y = -5x-15 \quad (1)$$
$$Y = 5x-10 \quad (2)$$

$(1)+(2): \quad 2Y = -25$

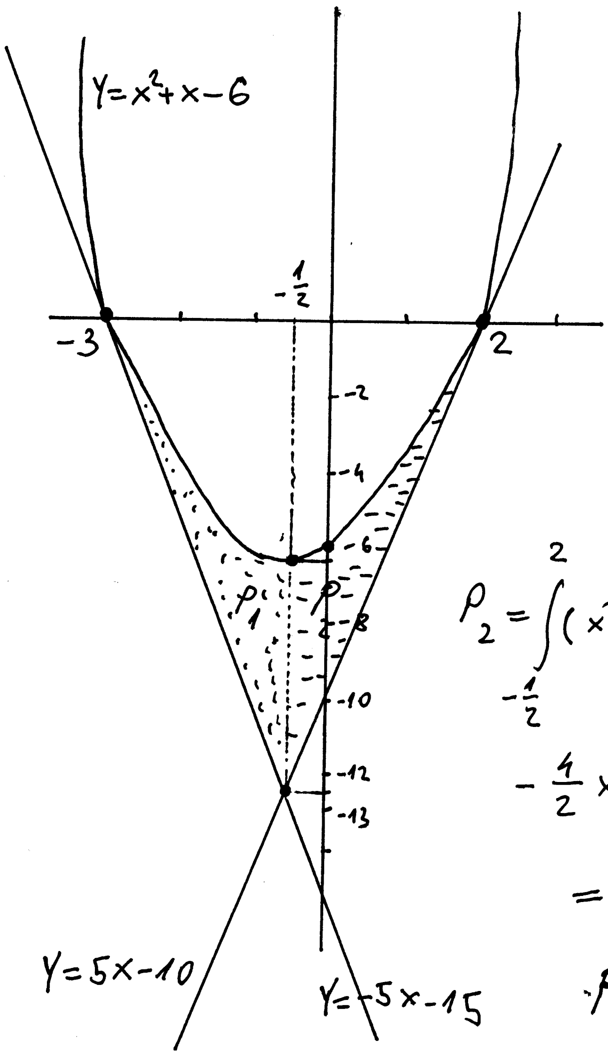
$Y = -\frac{25}{2} = -12\frac{1}{2}$

$(1)-(2): \quad -10x-5=0$

$-10x = 5$

$x = -\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{2}, -12\frac{1}{2}\right)$ je tačka presjeka pravih



$P = P_1 + P_2$

$$P_1 = \int_{-3}^{-\frac{1}{2}} \left(x^2+x-6-(-5x-15)\right)dx = \int_{-3}^{-\frac{1}{2}} (x^2+6x+9)dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{-\frac{1}{2}} + \frac{6}{2}x^2\Big|_{-3}^{-\frac{1}{2}} + 9x\Big|_{-3}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}+27\right)$$

$$+3\left(\frac{1}{4}-9\right)+9\left(-\frac{1}{2}+3\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{215}{8} + 3\cdot\frac{-35}{4}$$

$$+9\cdot\frac{5}{2} = \frac{215}{24} - \frac{630}{24} + \frac{540}{24} = \frac{125}{24}$$

$$P_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(x^2+x-6-(5x-10)\right)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (x^2-4x+4)\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2} -$$

$$-\frac{4}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2} + 4x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{3}\left(8+\frac{1}{8}\right) - 2\left(4-\frac{1}{4}\right) + 4\left(2+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{65}{8} - 2\cdot\frac{15}{4} + 4\cdot\frac{5}{2} = \frac{65}{24} - \frac{180}{24} + \frac{240}{24} = \frac{125}{24}$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{125}{24} + \frac{125}{24} = \frac{125}{12}$$ tražena površina

(#) Na parabolu $y=1-x^2$ povučena je normala u tački presjeka parabole i pozitivnog dijela x-ose. Odrediti površinu figure koju čine data parabola, povučena normala i y-osa.

Rj.

$y=1-x^2$

$y(0)=1$

$(0,1)$ je presjek sa y-osom

$1-x^2=0$

$x^2=1$

$x_{1,2}=\pm 1$

$(-1,0)$ i $(1,0)$ su nule f-je

$y=-x^2+1$

parabola izgleda

$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot(-1)}=0$

$D=0-4(-1)(1)=4$

$-\frac{D}{4a}=-\frac{4}{4\cdot(-1)}=1$

$T(0,1)$

$y-y_1=y'(x_1)(x-x_1)$ jednačina tangente u tački (x_1,y_1)

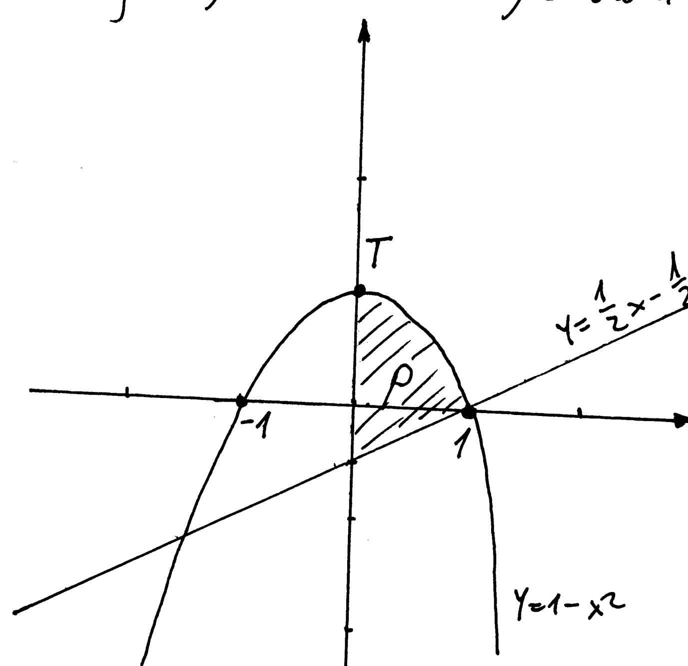
$y-y_1=-\frac{1}{y'(x_1)}(x-x_1)$ jednačina normale u tački (x_1,y_1)

$y'=-2x$ presjek parabole i pozitivnog dijela x-ose je tačka $(1,0)$

$y'(1)=-2$

$y-0=-\frac{1}{-2}(x-1)$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ jednačina normale u tački $(1,0)$



$$P=\int_0^1\left[(1-x^2)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1+\frac{3}{2}x\Big|_0^1$$

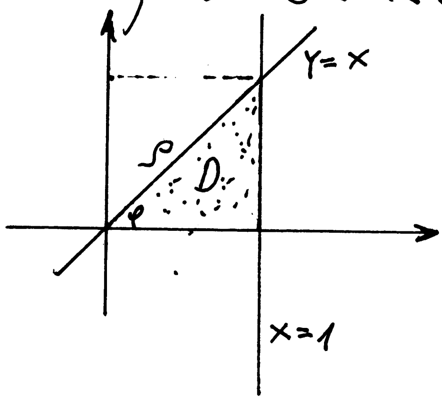
$$=-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 6}{2\cdot 6}-\frac{7}{12}=\frac{18-7}{12}=\frac{11}{12}$$

$P=\frac{11}{12}$ tražena površina

(#) Izračunati dvostruki integral $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$

ako je D oblast ograničena pravama $x=y$, $y=0$ i $x=1$.

Rj. Skicirajmo oblast D.



Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\rho}$$
$$\rho=\cos\varphi$$

$$D \xrightarrow{\text{transformacije}} D' : \begin{cases} 0\le\rho\le\dfrac{1}{\cos\varphi} \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Sad nije teško izračunati dati integral

$$I=\iint\limits_{D'}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{1/\cos\varphi}\frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\frac{d(1+\rho^2)}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}d\varphi=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-1\right)d\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=-\arcsin\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{4}$$

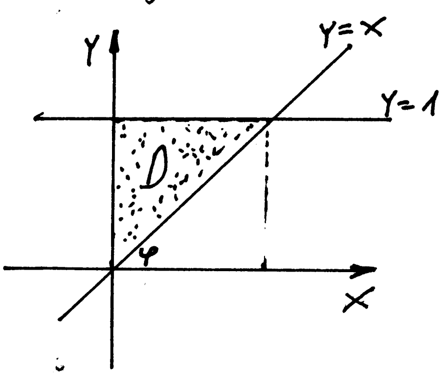
$$=-\Big(\underbrace{\arcsin\frac{1}{2}}_{=\frac{\pi}{6}}-\underbrace{\arcsin 0}_{=0}\Big)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$ traženo rješenje

Izračunati dvostruki integral $\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$

ako je D oblast ograničena pravama $y=x$, $x=0$ i $y=1$.

Rj.

Skicirajmo oblast D.



Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\cos(90^\circ-\varphi)=\frac{1}{\rho}$$
$$\sin\varphi=\frac{1}{\rho}$$
$$\rho=\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$D \xrightarrow{\text{transformišc}} D' : \begin{cases} 0\le\rho\le\dfrac{1}{\sin\varphi} \\ \dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Sad nije teško izračunati dati integral

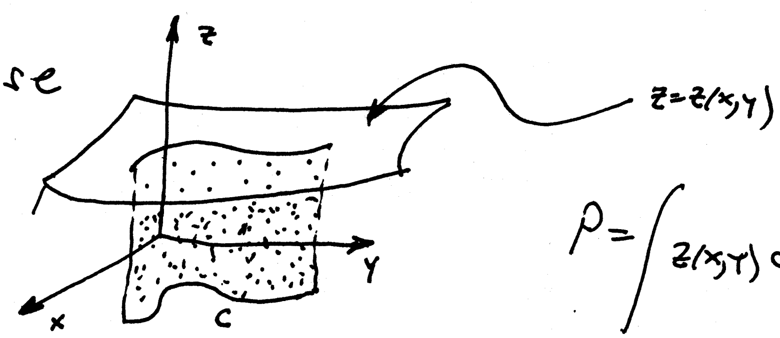
$$I=\iint\limits_{D'}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{1/\sin\varphi}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{1/\sin\varphi}\frac{d(1+\rho^2)}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\sin\varphi}}d\varphi$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right)d\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos\varphi)}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}}=\ldots=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$ traženo rješenje

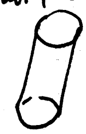
(#) Isključivo primjenom krivolinijskog integrala prve vrste izračunati površinu datog cilindričnog omotača, koji leži između ravni xOy i navedene površine

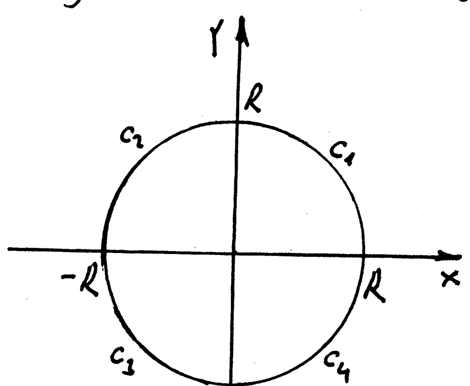
$$x^2+y^2=R^2, \qquad 2Rz = xy.$$

Rj. Prisjetimo se



$$P=\int_C z(x,y)\,ds$$ površina istačkanog dijela na skici

Znamo da je $x^2+y^2=R^2$ u prostoru jednačina za cilindar , dok je u xOy ravni ovo jednačina za krug sa centrom u $C(0,0)$ poluprečnika R.



Data je površ $z=\frac{1}{2R}xy$.
Ako dati krug na slici lijevo podijelimo na četri dijela (c_1, c_2, c_3, c_4) primjetimo da je za dijelove c_1 i c_3 površ $z=\frac{1}{2R}xy$ iznad xOy ravni, a za dijelove c_2 i c_4 ispod xOy ravni. Zbog simetričnosti krive $z=\frac{1}{2R}xy$ dovoljno je površinu izračunati samo za prvi oktant, tj. za c_1.

$x=R\cos\varphi$
$y=R\sin\varphi$
$ds=R\,d\varphi$

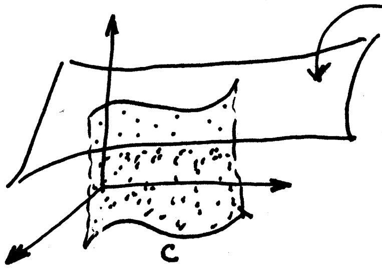
$$\boxed{P=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{1}{2R}xy\,ds}$$

$$P=4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2R}\cdot R^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot R\,d\varphi = R^2\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi = \frac{R^2}{2}(-1)\underbrace{\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}}_{-1-1} = R^2$$

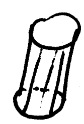
Isključivo primjenom krivoliniskog integrala prve vrste izračunati površinu datog cilindričnog omotača, koji leži između ravni xOy i navedene površine

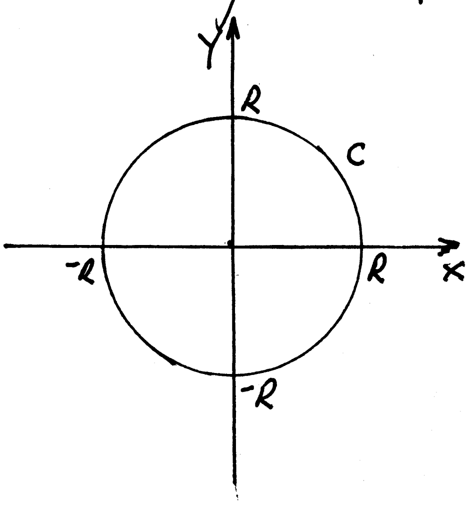
$$x^2+y^2=R^2, \qquad z=R+\frac{x^2}{R}.$$

Rj. Prisjetimo se



$$P=\int_C z(x,y)\,ds$$ površina istačkanog dijela na slici.

Znamo da je $x^2+y^2=R^2$ cilindar , a u xOy ravni krug.



Za sve tačke krive c površ $z=R+\frac{x^2}{R}$ se nalazi iznad xOy ravni. Prema tome

$$P=\int_{x^2+y^2=R^2}\left(R+\frac{x^2}{R}\right)ds=\left|\begin{array}{l}\text{uvedimo parametarski} \\ \text{oblik jednačine} \\ \text{kruga} \quad x=R\cos\varphi \\ \qquad\qquad y=R\sin\varphi \\ \qquad\qquad 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right|$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(R+\frac{R^2\cos^2\varphi}{R}\right)ds=\left|\begin{array}{l}ds=\sqrt{(R\cos\varphi)'^2+(R\sin\varphi)'^2}\,d\varphi \\ ds=\sqrt{R^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,d\varphi \\ ds=R\,d\varphi\end{array}\right|=R^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$=\left|\begin{array}{l}\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \\ \underline{1=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} \\ 2\cos^2\varphi=1+\cos 2\varphi \\ \cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\end{array}\right|=\ldots=3\pi R^2$$ tražena površina

(#) Metodom diferenciranja po parametru izračunati integral

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha|<1.$$

Rj: Prisjetimo se: $F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx \Rightarrow F'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha\,dx$

$$\left[\ln\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}\right]'_\alpha=\frac{1}{\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}}\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)'_\alpha\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cancel{1-\alpha\cos x}}{1+\alpha\cos x}\cdot\frac{\cos x\,(1-\alpha\cos x)-(1+\alpha\cos x)\cdot(-\cos x)}{(1-\alpha\cos x)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{2\cos x}{1-\alpha^2\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}$$

$$F'(\alpha)=2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x}=\left|\begin{array}{ll} tg\,x=z & \cos^2 x=\frac{\cos^2 x\ :\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x\ :\cos^2 x}=\frac{1}{tg^2 x+1} \\ x=arctg\,z & \cos^2 x=\frac{1}{1+z^2} \\ dx=\frac{dz}{1+z^2} & x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow z\Big|_0^{\infty}\end{array}\right|$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2-\alpha^2}{1+z^2}}=2\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^2+(1-\alpha^2)}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\underbrace{arctg\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2}}\Big|_0^{\infty}}_{=\frac{\pi}{2}-0}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$F'_\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \Rightarrow F(\alpha)=\pi\arcsin\alpha+C$ Kako je $F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 1\cdot\frac{dx}{\cos x}=0$

i $F(0)=\pi\underbrace{\arcsin 0}_{=0}+C$ to je $C=0$. Prema tome

$$\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin\alpha$$

traženo rješenje

(#) Metodom diferenciranja po parametru izračunati integral

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-x}}{x}\,dx,\quad \alpha>0.$$

Poslije toga, uz pomoć f-je dobijene nakon k uzastopnih izvoda $F^{(k)}(\alpha)$ izračunati

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx.$$

Rj. Prisjetimo se: Ako je $F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ tada je $F'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha\,dx$

$$F'(\alpha)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-x}}{x}\right)'_\alpha dx=\int_0^\infty\frac{(-x)\,e^{-\alpha x}}{x}\,dx=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} d(-\alpha x)=-\alpha\,dx \\ dx=-\frac{1}{\alpha}\,d(-\alpha x)\end{array}\right|=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d(-\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{\alpha}$$

$$F'_\alpha=-\frac{1}{\alpha}\;\Rightarrow\;F(\alpha)=-\int\frac{d\alpha}{\alpha}=-\ln\alpha+C$$

$$F(\alpha)=-\ln\alpha$$

$$\Uparrow$$

$$F(1)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-x}}{x}\,dx=0,\quad F(1)=-\underbrace{\ln 1}_{=0}+C\;\Rightarrow\;C=0$$

$$F''(\alpha)=-\int_0^\infty\left(e^{-\alpha x}\right)'dx=\int_0^\infty x\,e^{-\alpha x}\,dx\;;\quad F'''(\alpha)=-\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x}\,dx$$

$$F^{(k)}(\alpha)=(-1)^k\int_0^\infty x^k e^{-\alpha x}\,dx$$

Kako je $F(\alpha)=-\ln\alpha$ to je $F'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}$, $F''(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}$

$F'''(\alpha)=\frac{-2}{\alpha^3}$, $F^{(4)}(\alpha)=\frac{(-2)(-3)}{\alpha^4}\Rightarrow F^{(k)}(\alpha)=\frac{(k-1)!\,(-1)^{k}}{\alpha^k}$

Time $\int_0^\infty x^k e^{-\alpha x}\,dx=\frac{(k-1)!}{\alpha^k}$.